А. И. Голованов, М. К. Сагдатуллин

Казанский (Приволжский) федеральный университет,

Alexandr.Golovanov@ksu.ru, marat1@hitv.ru

РАСЧЕТ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБОЛОЧЕК СРЕДНЕЙ ТОЛЩИНЫ В БАЗИСЕ ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ НА ОСНОВЕ МКЭ

В последнее время всё чаще исследуют нелинейные задачи теории упругости, в частности, задачи теории пластин и оболочек. Работы прошлых десятилетий по данному направлению были обобщены в [1] – [3]. Было предложено множество методик, в частности, теория, численные модификации и обобщения вырожденного оболочечного элемента представлены в [1] – [4], применение метода сокращенного интегрирования отмечено в работах [1] – [3], [5].

В начале данной статьи представлены определяющие кинематические соотношения в нелинейной постановке нового восьми-узлового полилинейного изопараметрического конечного элемента (КЭ), где в качестве степеней свободы в рассматриваемом КЭ фигурируют узловые степени свободы на лицевых поверхностях. Определяются ковариантные и контравариантные компоненты метрического тензора,

$$(G) = G_{ij}\left(\vec{R}^i\vec{R}^j\right) = G^{ij}\left(\vec{R}_i\vec{R}_j\right),$$

$$\left({}^kg\right) = {}^kg_{ij}\left({}^k\vec{r}^{ik}\vec{r}^j\right) = {}^kg^{ij}\left({}^k\vec{r}_i{}^k\vec{r}_j\right),$$

тензоров деформаций (Коши – Грина и Альманси)

$$\left({}^kE\right) = {}^kZ_{ij}\left({}^k\vec{R}^{ik}\vec{R}^j\right),$$

$$\left({}^kA\right) = {}^kZ_{ij}\left({}^k\vec{r}^{ik}\vec{r}^j\right),$$

где

$$ {}^{k}Z_{ij} = \frac{1}{2}\left({}^{k}g_{ij} - G_{ij}\right) = \frac{1}{2}\sum_{m}\left(\frac{\partial^{k}x^{m}}{\partial\xi^{i}}\frac{\partial^{k}x^{m}}{\partial\xi^{j}} - \frac{\partial X^{m}}{\partial\xi^{i}}\frac{\partial X^{m}}{\partial\xi^{j}}\right), $$

и истинных напряжений Коши в исходном и текущем состоянии

$$ \left({}^{k}\sigma\right) = {}^{k}\sigma_{ij}\left({}^{k}\vec{r}^{i}\,{}^{k}\vec{r}^{j}\right) = {}^{k}\sigma^{ij}\left({}^{k}\vec{r}_{i}\,{}^{k}\vec{r}_{j}\right), $$

где введены ковариантные и контравариантные компоненты тензора напряжений. Используется метод двойной аппроксимации по точкам суперсходимости для устранения “ложных деформаций” поперечного сдвига. С технологией введения метода двойных аппроксимаций КЭ, использованного в настоящей работе, можно ознакомиться в [7]. Идейно близкие методики были предложены в [1] – [5], [8].

Далее работа посвящена использованию вариационного уравнения в скоростях напряжений в текущей конфигурации без учета массовых сил:

$$ \int\limits_{V_k}\left\{\left({}^{k}\dot{\sigma}\right)\cdot\cdot\left(\delta^{k}d\right) + \left[\frac{\partial^{k}v^{i}}{\partial^{k}x^{i}}\right]\left({}^{k}\sigma\right)\cdot\cdot\left(\delta^{k}d\right) - \right. $$

$$ \left. -\frac{1}{2}\left({}^{k}\sigma\right)\cdot\cdot\left[\left(\delta^{k}h\right)\cdot\left({}^{k}h\right) + \left({}^{k}h\right)^{T}\cdot\left(\delta^{k}h\right)^{T}\right]\right\}dV_k = $$

$$ = \int\limits_{S_k^{\sigma}}{}^{k}\dot{\vec{t}}_{n}^{*}\cdot\delta\bar{U}dS_k - \left\{\int\limits_{V_k}\left[\left({}^{k}\sigma\right)\cdot\cdot\left(\delta^{k}d\right)\right]dV_k - \int\limits_{S_k^{\sigma}}\vec{t}_{n}^{*}\delta\vec{U}dS\right\}. $$

Вывод данного вариационного уравнения описан в [6] и многочисленных журнальных публикациях. Была рассмотрена физическая модель материала Сетха, где в качестве тензора конечных деформаций используется тензор деформаций Альманси

$$ (\sigma) = 2\mu\,(A) + \lambda\,(g)\,I_{1A}, \quad I_{1A} = g^{ij}A_{ij}. $$

Описание этого материала представлено в [9], [10]. Проведены линеаризация данного вариационного уравнения, дискретизация полученных соотношений (матрицы жесткости, матрицы геометрической жесткости). Полученные выражения записываются в виде СЛАУ. Решая систему линейных алгебраических уравнений относительно приращений перемещений, находим $(l+1)$-ю конфигурацию ${}^{l+1}y^i = {}^{l}y^i + \Delta^l u^i$ и напряжения ${}^{k+1}\sigma = {}^{k}\sigma + \Delta^k\sigma$.

В заключительной части рассматривается тестовая задача изгиба балки в кольцо. Данная задача сначала решается аналитически, исходя из кинематических и физических соотношений. Далее на данной тестовой задаче апробируется методика, описанная выше. Приведенный числовой пример демонстрирует возможность настоящей методики в решении нелинейных задач теории оболочек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голованов А. И., Песошин А. В., Тюленева О. Н. *Современные конечно-элементные модели и методы исследования тонкостенных конструкций.* – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2005. – 442 с.

2. Голованов А. И., Тюленева О. Н., Шигабутдинов А. Ф. *Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций.* – М.: Физматлит, 2006. – 392 с.

3. Yang H. T. Y., Saigal S., Masud A., Kapania R. K. *A survey of recent shell finite elements* // Int. J. for Numerical Methods in Engineering. – 2000. – V. 47. – P. 101-127.

4. Ahmad S., Irons BM., Zienkiewicz OC. *Analysis of thick and shell structures by curved finite element* // Int. J. for Numerical Methods in Engineering. – 1990. – V. 2. – P. 419-459.

5. Hughes TJR, Cohen M., Haroun M. *Reduced and selective integration techniques in finite element analysis of plates* // Nuclear Engineering and Design. – 1978. – V. 46. – P. 203-222.

6. Голованов А. И., Султанов Л. У. *Математические модели вычислительной нелинейной механики деформируемых сред* // Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2009. – 465 с.

7. Голованов А. И., Сагдатуллин М. К. *Трехмерный конечный элемент для расчета тонкостенных конструкций* // Ученые записки Казанского государственного университета. Серия физ.-мат. науки. – 2009. – Т. 151. – Кн. 3. – С. 121-129.

8. Голованов А. И., Гуриелидзе М. Г. *Пошаговая постановка решения геометрически нелинейной задачи МКЭ* // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. – М., – 1998. – С. 82-87.

9. Лурье А. И. *Нелинейная теория упругости.* – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. – 512 с.

10. Новожилов В. В. *Основы нелинейной теории упругости* – М.: ОГИЗ. Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948. – 212 с.